Mathématiques exotiques

Un mathématicien exotique a décidé de remplacer l'addition et la multiplication exotique par les opérations suivantes : la somme exotique de deux nombres est égale au plus grand des deux nombres et le produit exotique de deux nombres est égal à leur somme au sens habituel ! Que deviennent vos connaissances mathématiques sous ces règles exotiques ?

Addition exotique $\oplus$

La somme exotique de deux termes est égale au plus grand des deux termes.

C'est une fonction Maximum « habituelle » .

Si $a > b$ alors $a \oplus b = a$

Si $a < b$ alors $a \oplus b = b$

Addition exotique ⊕

Code de l'algorithme

```
1   VARIABLES
2     a EST_DU_TYPE NOMBRE
3     b EST_DU_TYPE NOMBRE
4   DEBUT_ALGORITHME
5     LIRE a
6     LIRE b
7     AFFICHER a
8     AFFICHER " (+) "
9     AFFICHER b
10    AFFICHER " = "
11    SI (a>b) ALORS
12      DEBUT_SI
13      AFFICHER a
14      FIN_SI
15      SINON
16        DEBUT_SINON
17        AFFICHER b
18        FIN_SINON
19  FIN_ALGORITHME
```

Fonction maximum

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 6
Entrer b : 13
6 (+) 13 = 13
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 13
Entrer b : 6
13 (+) 6 = 13
***Algorithme terminé***
```

Commutatif : $a \oplus b = b \oplus a$

Soustraction exotique ⊖

Mathématiques habituelles : soustraction = addition de l'opposé

- Qu'est-ce que l'opposé ?
- Qu'est-ce que l'élément neutre ?

Élément neutre = $-\infty$

Or $-\infty$ impossible à obtenir avec addition exotique car
Addition exotique = Fonction max

Conclusion : Pas de soustraction exotique

Nouvelle opération : Arthurisation

Pour avoir une opération contraire à l'addition exotique, on a pensé à une opération qui simulerait la fonction Min : l'Arthurisation

Si $a < b$ alors $a \ominus b = a$

Si $a > b$ alors $a \ominus b = b$

Commutatif, pour prendre le plus petit l'ordre n'intervient pas :

$a \ominus b = b \ominus a$

Nouvelle opération : Arthurisation

```
1   VARIABLES
2     a EST_DU_TYPE NOMBRE
3     b EST_DU_TYPE NOMBRE
4     c EST_DU_TYPE NOMBRE
5   DEBUT_ALGORITHME
6     LIRE a
7     LIRE b
8     AFFICHER a
9     AFFICHER " (-) "
10    AFFICHER b
11    AFFICHER " = "
12    SI (a<b) ALORS
13      DEBUT_SI
14      c PREND_LA_VALEUR a
15      AFFICHER c
16      FIN_SI
17      SINON
18        DEBUT_SINON
19        c PREND_LA_VALEUR b
20        AFFICHER c
21        FIN_SINON
22  FIN_ALGORITHME
```

Console

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 9
Entrer b : 5
9 (-) 5 = 5
***Algorithme terminé***
```

```
1   VARIABLES
2     a EST_DU_TYPE NOMBRE
3     b EST_DU_TYPE NOMBRE
4     c EST_DU_TYPE NOMBRE
5   DEBUT_ALGORITHME
6     LIRE a
7     LIRE b
8     AFFICHER a
9     AFFICHER " (-) "
10    AFFICHER b
11    AFFICHER " = "
12    SI (a<b) ALORS
13      DEBUT_SI
14      c PREND_LA_VALEUR a
15      AFFICHER c
16      FIN SI
```

Console

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 5
Entrer b : 9
5 (-) 9 = 5
***Algorithme terminé***
```

Multiplication exotique ⊗

Le produit exotique de deux termes est égal à la somme au sens « habituel » .

$a \otimes b = a + b$

L'addition « habituelle » est commutative : il en va de même pour la multiplication exotique.

$a \otimes b = b \otimes a$

Multiplication exotique ⊗

Code de l'algorithme

```
1   VARIABLES
2     a EST_DU_TYPE NOMBRE
3     b EST_DU_TYPE NOMBRE
4     c EST_DU_TYPE NOMBRE
5   DEBUT_ALGORITHME
6     LIRE a
7     LIRE b
8     c PREND_LA_VALEUR a+b
9     AFFICHER a
10    AFFICHER " (*) "
11    AFFICHER b
12    AFFICHER " = "
13    AFFICHER c
14  FIN_ALGORITHME
```

Addition « habituelle »

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 4
Entrer b : 6
4 (*) 6 = 10
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 6
Entrer b : 4
6 (*) 4 = 10
***Algorithme terminé***
```

Commutatif : $a \circledast b = b \circledast a$

Division exotique ~

Mathématiques habituelles : division = multiplication par l'inverse

- Qu'est-ce que l'inverse ?

- Qu'est-ce que l'élément neutre ?

Multiplication exotique = addition « habituelle »
Donc élément neutre = 0
Inverse exotique = opposé « habituel »
Donc division exotique = soustraction « habituelle »

Donc non commutative

Division exotique ~

Code de l'algorithme

```
1   VARIABLES
2     a EST_DU_TYPE NOMBRE
3     b EST_DU_TYPE NOMBRE
4     c EST_DU_TYPE NOMBRE
5   DEBUT_ALGORITHME
6     LIRE a
7     LIRE b
8     c PREND_LA_VALEUR a-b
9     AFFICHER a
10    AFFICHER " ~ "
11    AFFICHER b
12    AFFICHER " = "
13    AFFICHER c
14  FIN_ALGORITHME
```

Soustraction « habituelle »

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 4
Entrer b : 3
4 ~ 3 = 1
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 3
Entrer b : 4
3 ~ 4 = -1
***Algorithme terminé***
```

Non commutatif : $a \sim b \neq b \sim a$

Puissances exotiques ⓝ

Élever un nombre à la $n^{\text{ième}}$ puissance signifie multiplier ce nombre par lui même n fois.

$$x^{ⓝ} = \underbrace{x \circledast x \circledast \ldots \circledast x}_{\text{n facteurs}} = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{\text{n termes}} = n * x$$

Exotiquement, les puissances sont une multiplication « habituelle » .

Comme la multiplication habituelle, les puissances exotiques sont commutatives.

$$x^{ⓝ} = n^{ⓧ}$$

Racines exotiques

La racine carrée de x est le nombre qui, lorsqu'il est multiplié par lui même, donne x.

$\sqrt{x} * \sqrt{x} = x$ donc $\sqrt{x} + \sqrt{x} = x$ donc $\sqrt{x} = x/2$

Il en va de même pour les autres racines :

$\sqrt[3]{x} = x / 3$

$\sqrt[n]{x} = x / n$

Prendre la n^{ième} racine exotique d'un nombre correspond à diviser ce nombre par n en mathématiques « habituelles ».

Priorités opératoires exotiques

On définit les priorités opératoires de notre système exotique.
On choisit de conserver les priorités opératoires « habituelles » , c'est-à-dire :

1) Parenthèses
2) Puissances et racines
3) Multiplications et divisions
4) Additions et arthurisation

Pour les divisions, on calcule le numérateur et le dénominateur séparément avant d'appliquer la division, comme dans les mathématiques « habituelles».

Pour les racines, on calcule tout ce qu'il y a sous la racine avant d'appliquer la racine.

Distributivité exotique

On s'intéresse aux propriétés mathématiques et on vérifie si elles existent toujours en mathématiques exotiques.

$k \times (a + b) = ka + kb$

Exotique : $k \otimes (a \oplus b) = k \otimes a \oplus k \otimes b$?

- Si $a > b$

alors $k \otimes a > k \otimes b$

$k + a > k + b$

Donc distributé exotique existe

Opérations de fractions exotiques

Maths habituelles : si on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même nombre k, la fraction est conservée.

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$$

Exotique : $\dfrac{a \circledast k}{b \circledast k} = \dfrac{a}{b}$?

$$\frac{a}{b} \qquad \frac{a \circledast k}{b \circledast k}$$

$$a - b \qquad (a + k) - (b + k)$$

$$= a + \cancel{k} - b - \cancel{k}$$

$$= a - b$$

Donc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \circledast k}{b \circledast k}$

Opérations de fractions exotiques

Mathématiques habituelles : pour additionner deux fractions, elles doivent avoir le même dénominateur. On additionne alors les numérateurs.

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k} = \frac{a+b}{k}$$

Exotique : $\frac{a}{k} \oplus \frac{b}{k} = \frac{a \oplus b}{k}$?

- Si $a > b$

alors $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$

$$a - k > b - k$$

Opérations de fractions exotiques

Le produit en croix est-il conservé en mathématiques exotiques ?

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow b \times c = a \times d$$

Exotique :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow b \otimes c = a \otimes d \ ?$$

$$(a - b) = (c - d)$$

$$a = c - d + b$$

$$a + d = c + b$$

$$a \otimes d = b \otimes c$$

Fonctions linéaires exotiques

Fonction linéaire : $f(x) = a \circledast x = a + x$ définie sur $\mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R}$

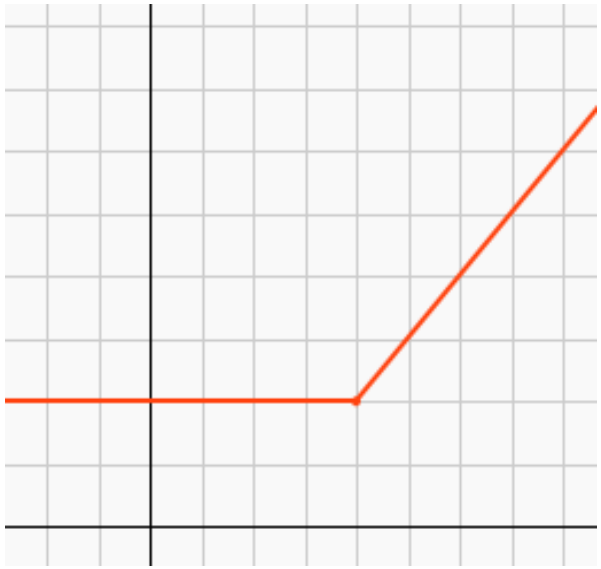
Affine « habituelle » avec coefficient directeur de 1 et ordonnée à l'origine égale à a.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  f EST_DU_TYPE NOMBRE
  M EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Définir l'intervalle d'étude de la fonction f [M;N]"
  LIRE M
  LIRE N
  AFFICHER "Pour la fonction f f(x) = a (*) x définie sur l'intervalle ["
  AFFICHER M
  AFFICHER " ; "
  AFFICHER N
  AFFICHER "]"
  LIRE a
  POUR x ALLANT_DE M A N
    DEBUT_POUR
    f PREND_LA_VALEUR a+x
    AFFICHER "f("
    AFFICHER x
    AFFICHER ") = "
    AFFICHER f
    FIN_POUR
  TRACER_SEGMENT (M,a+M)->(N,a+N)
FIN_ALGORITHME
```

Fonctions affines exotiques

Fonction affine : f(x) = a ⊛ x ⊕ b définie sur |R avec a et b ∈|R*

D'abord constante égale à b puis affine de coefficient directeur 1 et d'ordonnée à l'origine a.



Code de l'algorithme

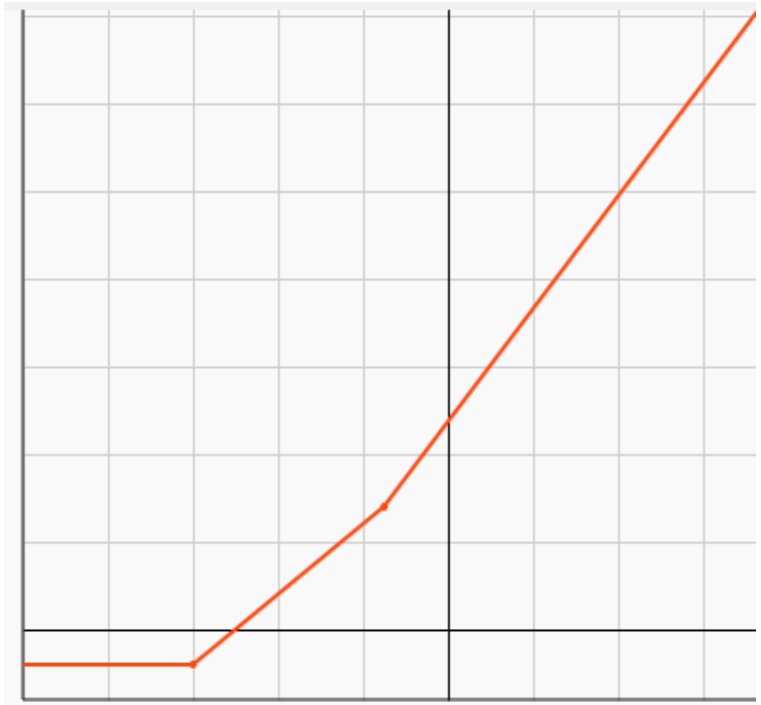
```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  f EST_DU_TYPE NOMBRE
  M EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Définir l'intervalle d'étude de la fonction f [M;N]"
  LIRE M
  LIRE N
  AFFICHER "Pour la fonction f f(x) = a (*) x (+) b définie sur l'intervalle ["
  AFFICHER M
  AFFICHER " ; "
  AFFICHER N
  AFFICHER "]"
  LIRE a
  LIRE b
  POUR x ALLANT_DE M A N
    DEBUT_POUR
    SI (a+x>b) ALORS
      DEBUT_SI
      f PREND_LA_VALEUR a+x
      FIN_SI
    SI (a+x<b) ALORS
      DEBUT_SI
      f PREND_LA_VALEUR b
      FIN_SI
    AFFICHER "f("
    AFFICHER x
    AFFICHER ") = "
    AFFICHER f
    FIN_POUR
  TRACER_POINT (b-a,b)
  TRACER_SEGMENT (M,b)->(b-a,b)
  TRACER_SEGMENT (b-a,b)->(N,a+N)
FIN_ALGORITHME
```

Polynômes du second degré

Soit $f(x) = a \otimes x^{2} \oplus b \otimes x \oplus c = 2x + a \oplus x + b \oplus c$

Ce polynome sera représenter par une courbe en 2 ou 3 morceaux (une constante, une affine de coefficient dirrecteur 1 et une de 2).

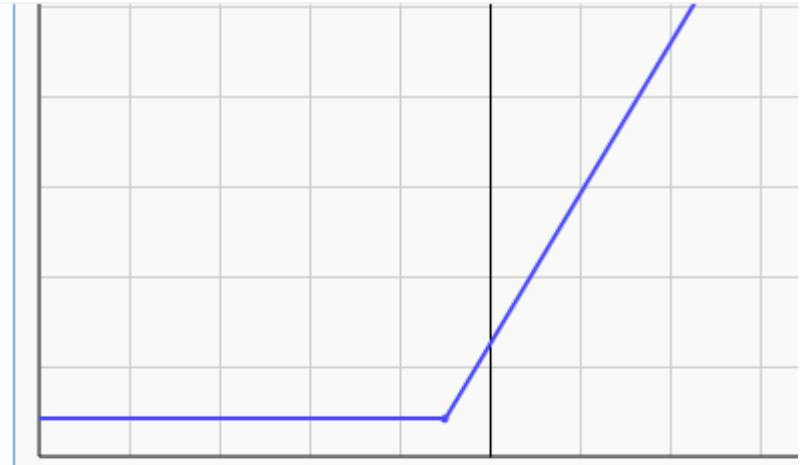
Polynômes du second degré



Xmin: -10 ; Xmax: 10
Ymin: -2 ; Ymax: 23
GradX: 2 ; GradY: 2.5

Console

```
***Algorithme lancé***
Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction f [M;N]
Entrer M : -10
Entrer N : 10
Pour la fonction f f(x) = a (*) x(²) (+) b (*) x (+) c d
Entrer a : 2
Entrer b : 5
Entrer c : -1
```



Xmin: -10 ; Xmax: 10
Ymin: 5 ; Ymax: 29
GradX: 2 ; GradY: 2.4

Code de l'algorithme

```
1   VARIABLES
2     a EST_DU_TYPE NOMBRE
3     b EST_DU_TYPE NOMBRE
```

Console

```
***Algorithme lancé***
Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction f [M;N]
Entrer M : -10
Entrer N : 10
Pour la fonction f f(x) = a (*) x(²) (+) b (*) x (+) c
Entrer a : 8
Entrer b : 3
Entrer c : 6
```